Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

11-лекция. Решение дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. Гиперболические уравнения

Цель лекции – изучение численных методов решения уравнений гиперболического типа. В рамках курса студенты освоят метод сеток (конечно-разностные схемы), научатся строить аппроксимации для начально-краевых задач, анализировать их точность, устойчивость и сходимость, а также применять полученные методы для численного решения задач математической физики и инженерии.

План лекции:

1. Метод сеток для уравнений гиперболического типа

2. Контрольные вопросы

3. Список литературы

1 Метод сеток для уравнения параболического типа

Остановимся на простейшем уравнении гиперболического типа, а именно уравнении свободных колебаний однородной ограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

и будем искать решение уравнения (1.1) при заданных начальных и краевых условиях

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = F(x) \qquad (0 \le x \le l) \tag{1.2}$$

и

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(l,t) = \psi(t) \qquad (0 \le t < \infty). \tag{1.3}$$

Решим эту смешанную задачу методом сеток [7,8]. Как и в случае параболического уравнения, покроем полуполосу $0 \le x \le l$, $0 \le t < \infty$ прямоугольной сеткой $x_i = ih$, $t_j = jk$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = l/n$ (n — целое) и $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j = k$. На сетке x_i, t_j приближенно заменим дифференциальное уравнение (1.1) соответствующим конечно-разностным уравнением.

Пользуясь симметричными формулами для производных, будем иметь

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \tag{1.4}$$

При $k = h/a$ уравнение (1.4) упрощается и принимает вид

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j},$$

откуда

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.5) видно, что для получения значений $u(x,t)$ в $(j+1)$-м слое используются значения $u(x,t)$ в двух предыдущих слоях: j-м и $(j-1)$-м (рисунок 1). Для начала вычисления по формуле (1.5) также необходимо знать значения $u(x,t)$ на двух слоях, в то время как начальные условия (1.2) задают нам значения $u(x,t)$ лишь на нулевом слое $j = 0$. Однако, используя начальные условия, можно определить значения $u(x,t)$ на фиктивном слое с номером $j = -1$.

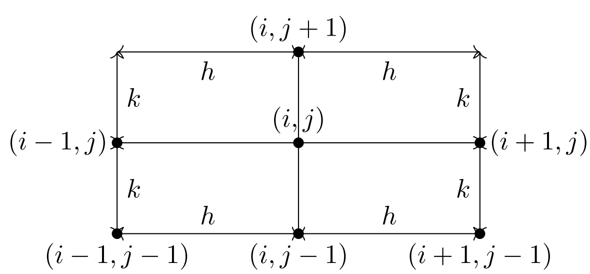

Рисунок 1

Для этого заменим производную во втором начальном условии конечно-разностным отношением. Тогда будем иметь

$$\frac{u_{i,-1} - u_{i0}}{-k} = F_i,$$

где $F_i = F(x_i)$. Отсюда

$$u_{i,-1} = u_{i0} - kF_i. \tag{1.6}$$

Теперь, зная значения $u(x,t)$ на слое $j = -1$, определяемые с помощью формулы (1.6), можно начать вычисления. Краевые условия (1.3) используются для получения значений u_{0j} и u_{nj}.

Вместо определения значений $u(x,t)$ на слое $j=-1$ можно вычислить значения $u(x,t)$ на слое $j=1$. Это достигается, например, с помощью формулы Тейлора

$$u_{i1} \approx u_{i0} + k\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}. \tag{1.7}$$

Учитывая, что согласно уравнению (1.1) имеем

$$\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2},$$

перепишем формулу (1.7) в другом виде, а именно:

$$u_{i1} \approx u_{i0} + k\frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{a^2k^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2}. \tag{1.8}$$

Из начальных условий (1.2), предполагая, что $f(x) \in C^{(2)}[0,l]$, получаем:

$$u_{i0} = f_i, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = F_i, \quad \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2} = f_i''. \tag{1.9}$$

Подставляя эти значения в формулу (1.8), окончательно находим

$$u_{i1} \approx f_i + kF_i + \frac{a^2k^2}{2}f_i''. \tag{1.10}$$

Очевидно, формулу (1.10) целесообразно применять в том случае, когда функция $f(x)$ задана аналитическим выражением.

Пример. Методом сеток найти приближенное решение уравнения [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty);$$

$$u(x,0) = x(\pi - x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad (0 \le x \le \pi).$$

Решение. В нашем случае $a=1$, поэтому $k=h$. Выбираем $k=h=\pi/18$. С помощью формулы (10) определим значения u_{i1}. Так как

$$F_i = 0, \quad f_i'' = -2,$$

то

$$u_{i1} = u_{i0} - h^2 = u_{i0} - 0{,}03048.$$

Дальше решение проводится по формуле(1.5). Полученные значения приведены в таблице 1.

Таблица 1: Значения $u(x,t)$ для волнового уравнения

t	$x=0$	$x=h$	$x=2h$	$x=3h$	$x=4h$	$x=5h$	$x=6h$	$x=7h$	$x=8h$	$x=9h$
$t=0$	0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
$t=h$	0	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
$t=2h$	0	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
$t=3h$	0	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
$t=4h$	0	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
$t=5h$	0	0,244	0,487	0,731	0,975	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

В таблице приведены лишь данные для $0 \leq x \leq \pi/2$, так как график решения $u = u(x,t)$ симметричен относительно плоскости $x = \pi/2$.

Замечание 1. Отметим одну особенность уравнения колебаний струны. При решении задачи Коши для уравнения колебаний струны дифференциальный оператор

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

заменяется на сетке при условии, что $h = ak$, конечно-разностным оператором

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) - \frac{1}{k^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) \tag{1.11}$$

(в исходном тексте, видимо, опечатка; привожу стандартную аппроксимацию). Покажем, что в этом случае функция, являющаяся решением уравнения колебания струны, т. е. удовлетворяющая уравнению

$$L[u] = 0, \tag{1.12}$$

является также решением уравнения

$$L_h[u] = 0.$$

В самом деле, как известно [1–5], любое решение дифференциального уравнения (1.12) может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

где φ и ψ — дважды дифференцируемые функции. Полагая

$$x_i = ih, \quad t_j = jk = \frac{ih}{a},$$

будем иметь

$$u_{ij} = u(x_i, t_j) = \varphi[(i-j)h] + \psi[(i+j)h].$$

Подставляя это выражение в формулу (1.11), получим

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2}\{\varphi[(i-j-1)h] + \psi[(i+j+1)h] - \varphi[(i-j+1)h] -$$
$$\psi[(i+j+1)h] - \varphi[(i-j-1)h] - \psi[(i+j-1)h] + \psi[(i-j+1)h] + \psi[(i+j-1)h]\} \equiv 0.$$

Замечание 2. Если для уравнения колебаний струны (1.1) краевые условия (1.3) отсутствуют, то с помощью формулы (1.5) можно построить решение $u(x,t)$ соответствующей задачи Коши лишь в сеточной области плоскости Oxt, имеющей форму треугольника OAB (рисунок 2), где OB и AB — характеристики

$$t = \frac{x}{a}, \quad t = \frac{l-x}{a},$$

проходящие соответственно через точки $O(0,0)$ и $A(l,0)$.

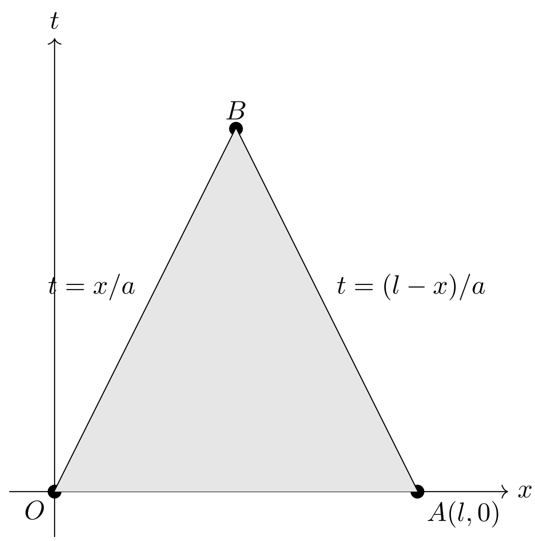

Рисунок 2. Область зависимости для задачи Коши

2 Контрольные вопросы

1. Что понимается под уравнениями гиперболического типа? Приведите примеры.

2. Сформулируйте классическую задачу Коши для одномерного волнового уравнения.

3. Что такое разностная схема? Какие основные элементы она включает?

4. Как вводится сетка по пространству и времени? Определите шаги h и τ.
5. Запишите явную разностную схему для одномерного волнового уравнения.
6. Запишите неявную разностную схему для гиперболического уравнения.
7. Что такое аппроксимация разностной схемы? Как определяется порядок аппроксимации?
8. В чем заключается метод прогонки для решения разностных уравнений?
9. Какие особенности возникают при решении нелинейных гиперболических уравнений?
10. Какие существуют методы повышения устойчивости разностных схем?

3 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–24].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1964, гл. I, IV.

[2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, изд. 4, «Наука», 1966, лекции I—IV.

[3] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, Физматгиз, 1961, гл. I и III.

[4] Кошляков Н. С., Основные дифференциальные уравнения математической физики, изд. 4, ОНТИ, 1936, гл. I.

[5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, изд. 18, т. II, Физматгиз, 1962, гл. VIII.

[6] Колгатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.

[7] Милин В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955, гл. VIII.

[8] Рябенький В. С. и Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956, гл. I, II.

[9] Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, «Наука», 1966.

[10] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.

[11] Современная математика для инженеров, под ред. Беккенбаха Э. Ф., гл. II, Браун Дж. В., Методы Монте-Карло, ИЛ, 1958.

[12] Демидович Б. П. и Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, Гостехиздат, 1951, гл. XVII.

[13] Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, ИЛ, 1956, гл. VIII.

[14] Мороз Ф. М. и Кимбелл Дж. Е., Методы исследования операций. Приложения, «Советское радио», 1956.

[15] Математика в СССР за сорок лет, т. I, Физматгиз, 1959, Гаврунин М. К., Канаторович Л. В., Приближенные и численные методы.

[16] Положий Г. Н. и др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. VII.

[17] Гутенмахер Л. И., Электрические модели, Изд. АН СССР, 1940.

[18] Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.

[19] Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, изд. 2, Физматгиз, 1961, гл. VIII.

[20] Гурса Э. Ж., Курс математического анализа, т. 3, ГТТИ, 1933, гл. XXVII.

[21] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. XI.

[22] Березкин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, изд. 3, «Наука», 1966, т. II, гл. X.

[23] Слободянский М. Г., Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругого статики, Прикл. матем. и мех. 3, вып. 1 (1939).

[24] Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.